Quelques propriétés des processus de naissance et de mort en environnement périodique

Philippe Carmona

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR 6629
Universitéé de Nantes, 2 Rue de la Houssinière
BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 03, France

24 octobre 2022

Résumé

Nous essayons de transcrire dans le cadre d'un environnement périodique quelques résultats classiques sur les processus de naissance et de mort. [1]

Remerciements. L'auteur remercie le Centre Henri Lebesgue ANR-11-LABX-0020-01 pour son support lors de la conception de ce travail.

1 Le modèle

Étant données deux fonctions boréliennes positives T-périodiques, le taux de naissance $\lambda(t)$ et le taux de mort $\mu(t)$, on considère le processus de Markov inhomogène de saut pur à valeurs dans $\mathbb{N}$ de générateur:

$$L_t f(x) = x(\lambda(t)(f(x+1) - f(x)) + \mu(t)(f(x-1) - f(x))) \tag{1.1}$$

On peut construire explicitement le processus ainsi. Supposons que le processus comporte x individus à l'instant t. Alors, le prochain temps de saut est $t + T$ avec T de loi:

$$\mathbb{P}\left(T > s\right) = \exp\left(-x\int_0^s (\lambda(u) + \mu(u))\, du\right) \tag{1.2}$$

Sachant que $T = s$, alors il y a une naissance ,X croit de une unité, avec la probabilité $\lambda(t+s)/(\lambda(t+s) + \mu(t+s))$, et il décroît d'une unité sinon. La probabilité de survie d'un individu introduit à la date t_0 a été calculée par Kendall [16] et vaut:

$$p_e(t_0) = \mathbb{P}\left(X(t) > t\,, \forall t \geq t_0 \mid X(t_0) = 1\right) = \left(1 + \int_{t_0}^{\infty} \mu(t) e^{-(\varphi(t) - \varphi(t_0))}\, dt\right)^{-1} \tag{1.3}$$

avec $\varphi(t) = \int_0^t (\lambda(s) - \mu(s))\, ds$ le taux de croissance intégré. En conséquence, (voir par exemple Bacaër and Guernaoui [5])

$$\forall t_0\,, p_e(t_0) > 0 \iff R_0 = \frac{\langle\lambda\rangle}{\langle\mu\rangle} > 1 \tag{1.4}$$

avec $\langle\lambda\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \lambda(s)\, ds$. On vérifiera, en Section 4, que si $R_0 < 1$ le processus décroît à une vitesse exponentielle, et qu'il existe une limite de Yaglom périodique. On montrera en Section 3 que si $R_0 > 1$, alors sur l'ensemble de survie de probabilité $p_e(t_0)$ le processus croît à une vitesse exponentielle et qu'en renormalisant par cette vitesse exponentielle on observe l'existence d'une loi de composition stable et de valeurs reproductives, tous deux périodiques (voir Section 5) .

Le cas d'un processus de naissance et de mort multitype est finalement traité en section 7. Le nombre de reproduction peut être remplacé par le rayon spectral de la matrice de monodromie.

Nous avons tenté de donner des preuves simplifiées des résultats. Les références les plus utilisées sont : les travaux sur les processus de branchement généraux de Jagers and Nerman [12, 13, 14], les études déterministes et stochastiques sur les opérateurs de prochaine génération de Bacaër [2], Bacaër and Ait Dads [3, 4], Bacaër and Guernaoui [5].

[1] 24 octobre 2022

2 Criticalité et Nombre de reproduction

Rappelons les résultats de Bailey [6], Équation (8.44): pour $0 \leq x < 1$,

$$\mathbb{E}\left[x^{X(t)}\right] = 1 + \left(\frac{e^{-\varphi(t)}}{x-1} - \int_0^t \lambda(s) e^{-\varphi(s)}\, ds\right)^{-1}. \tag{2.1}$$

On en déduit que, après une intégration par parties,

$$\mathbb{P}\left(X(t) > 0\right) = \left(e^{-\varphi(t)} + \int_0^t \lambda(s) e^{-\varphi(s)}\, ds\right)^{-1} = \left(1 + \int_0^t \mu(s) e^{-\varphi(s)}\, ds\right)^{-1} \tag{2.2}$$

et donc la probabilité d'émergence est

$$p_e(0) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X(t) > 0 \mid X(0) = 1\right) = \left(1 + \int_0^\infty \mu(s) e^{-\varphi(s)}\, ds\right)^{-1} \tag{2.3}$$

En conséquence $p_e(0) > 0$ ssi $\int_0^\infty \mu(s) e^{-\varphi(s)}\, ds < +\infty$. Dans le cas périodique avec λ, μ deux fonctions mesurables positives bornées, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \varphi(T)/T = \frac{1}{T}\int_0^T (\lambda(s) - \mu(s))\, ds = \langle\lambda\rangle - \langle\mu\rangle\,. \tag{2.4}$$

En conséquence $p_e(0) > 0$ ssi $\langle\lambda\rangle > \langle\mu\rangle$ i.e. $R_0 = \frac{\langle\lambda\rangle}{\langle\mu\rangle} > 1$. C'est cohérent avec le résultat de Bacaer qui calcule R_0 comme le rayon spectral du Next Generation Operator (voir Bacaër [2], Bacaër and Guernaoui [5] et Diekmann et al. [8, Section 7.9]).

3 Cas Surcritique : Identification de la probabilité d'extinction

Soit un processus de naissance et de mort $(X(t), t \geq 0)$ de taux de naissance $\lambda(t)$ et de taux de mort $\mu(t)$, deux fonctions de période T, positives et bornées. Le générateur de X est donné par (1.1).

On se place dans le cas surcritique $R_0 = \frac{\langle\lambda\rangle}{\langle\mu\rangle} > 1$.

Observons que la martingale $W(t) = X(t)e^{-\varphi(t)}$ avec $\varphi(t) = \int_0^t (\lambda(s) - \mu(s))\, ds$ est uniformément intégrable, car bornée dans L^2. En effet, l'équation de Kolmogorov backward appliquée à $f(x) = x^2$, donne, étant donné que $L_t f(x) = 2x^2(\lambda(t) - \mu(t)) + (\lambda(t) + \mu(t))x$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{E}_1\left[X(t)^2\right] &= \mathbb{E}_1\left[Lf(X(t))\right] = 2(\lambda(t) - \mu(t))\mathbb{E}_1\left[X(t)^2\right] + (\lambda(t) + \mu(t))\mathbb{E}_1\left[X(t)\right] && (3.1)\\
&= 2(\lambda(t) - \mu(t))\mathbb{E}_1\left[X(t)^2\right] + (\lambda(t) + \mu(t))e^{\varphi(t)}\,. && (3.2)
\end{aligned}$$

On résout l'équation différentielle

$$v(t) = \mathbb{E}_1\left[X(t)^2\right] = e^{2\varphi(t)}\left(v(0) + \int_0^t e^{-\varphi(s)}(\lambda + \mu)(s)\, ds\right) \tag{3.3}$$

et donc, par convergence dominée, comme les fonctions λ et μ sont bornées,

$$\mathbb{E}_1\left[W(t)^2\right] = 1 + \int_0^t e^{-\varphi(s)}(\lambda + \mu)(s)\, ds \to 1 + \int_0^\infty e^{-\varphi(s)}(\lambda + \mu)(s)\, ds \quad \text{quand } t \to +\infty \tag{3.4}$$

Sous probabilité $\mathbb{P}\left(. \mid X(t_0) = 1\right)$ on montre de même que $(W(t) = e^{\varphi(t)}X(t), t \geq t_0)$ est une martingale UI.

On désire montrer que $s(t) = \mathbb{P}\left(W_\infty = 0 \mid X(t) = 1\right)$ est la probabilité d'extinction $q(t) = \mathbb{P}\left(\lim_{s\to+\infty} X(s) = 0 \mid X(t) = 1\right)$.

Primo, comme la martingale W est uniformément intégrable on a $\mathbb{E}\left[W_\infty \mid X(t)=1\right] = \mathbb{E}\left[W(t) \mid X(t)=1\right] = e^{\phi(t)} > 0$ En conséquence $s(t) < 1$.

Secundo, montrons que $M(t) = s(t)^{X(t)}$ est une martingale. En effet par la propriété de Markov, et la propriété de branchement qui entraîne que $\mathbb{E}\left[W_\infty = 0 \mid X(t) = x\right] = s(t)^x$,

$$
\begin{aligned}
s(0) = \mathbb{P}\left(W_\infty = 0 \mid X(0) = 1\right) &= \mathbb{E}\left[W_\infty \circ \theta^t = 0 \mid X(0) = 1\right] \\
&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[W_\infty \circ \theta^t = 0 \mid \mathcal{F}_t\right] \mid X(0) = 1\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(W_\infty = 0 \mid X(t) = x\right)_{x = X(t)} \mid X(0) = 1\right] \\
&= \mathbb{E}\left[s(t)^{X(t)} \mid X(0) = 1\right]
\end{aligned}
$$

On peut écrire la même équation en décalant l'origine des temps de τ: pour tout $t \geq 0$,

$$
s(\tau) = \mathbb{E}\left[s(t+\tau)^{X(t+\tau)} \mid X(\tau) = 1\right] \tag{3.5}
$$

On peut enfin écrire, en combinant encore propriété de Markov et propriété de branchement,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M(t+s) \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[s(t+s)^{X(t)} \circ \theta^s \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[s(t+s)^{X(t)} \mid X(s) = x\right]_{x = X(s)} \\
&= \mathbb{E}\left[s(t+s)^{X(t)} \mid X(s) = 1\right]^{X(s)} = s(s)^{X(s)} = M(s)\,.
\end{aligned}
$$

La martingale $M(t)$ est positive bornée, car $0 \leq s \leq 1$, donc est UI et converge ps et dans L^1 vers une va $M_\infty \in [0,1]$. Comme la va $X(t)$ est à valeurs entières, et la fonction s est T-périodique, il vient

$$
\lim_{n \to +\infty} s(t_0)^{X(t_0+nT)} = \lim_{n \to +\infty} s(t_0+nT)^{X(t_0+nT)} = M(\infty)
$$

Donc si $s(t_0) > 0$, comme $s(t_0) < 1$, si la suite d'entiers $n \to X(t_0+nT)$ converge vers $l \in \mathbb{N}$, et donc est constante à partir d'un certain rang, ce qui est impossible vu que les naissances et morts sont encore possibles si $l \neq 0$. Donc $X(t_0+nT)$ tend vers $+\infty$ ou 0 et donc, vu que $s(t_0) < 1$, on a $M(\infty) = 0$ si $X(t_0+nT)$ tend vers $+\infty$ et $M(\infty) = 1$ si $X(t_0+nT)$ tend vers 0. On en déduit, vu que la martingale M est UI:

$$
\begin{aligned}
s(0) = \mathbb{P}\left(W_\infty = 0 \mid X(0) = 1\right) &= \mathbb{E}\left[M_0 \mid X(0) = 1\right] = \mathbb{E}\left[M_\infty \mid X(0) = 1\right] \\
&= \mathbb{P}\left(X(t_0+nT) \to +\infty \mid X(0) = 1\right) = \mathbb{P}\left(X(t) \to +\infty \mid X(0) = 1\right) = q(0)\,.
\end{aligned}
$$

Proposition 3.1 Dans le cas surcritique on a $\{W_\infty > 0\} = \{\forall t, X(t) > 0\}$ p.s.

Démonstration Il suffit de remarquer que comme $W(t) = X(t)e^{-\phi(t)}X(t) \to W_\infty$ p.s. et que $\varphi(t) \to +\infty$ on a $\{W_\infty > 0\} \supset \{\forall t, X(t) > 0\}$ et que les deux ensembles précédents ont même probabilité. ■

4 Cas sous critique : limite de Yaglom périodique

La décroissance exponentielle dans le cas $R_0 < 1$ provient de l'existence de la limite de la martingale $W(t) = e^{-\varphi(t)}X(t)$ et du fait que $\varphi(t)/t \to \langle\varphi\rangle < 0$.

Dans le cas d'un environnement constant, on connaît depuis longtemps l'existence d'une limite de Yaglom, qui est une loi géométrique, et l'étude de l'existence et l'unicité de lois quasi stationnaire est très développée: voir par exemple le survol de Méléard and Villemonais [18].

L'existence d' une limite de Yaglom ne va pas poser de problème car on connaît explicitement la fonction génératrice de la loi de $X(t)$, voir Bailey [6, formula (9.31)],

$$\mathbb{E}_1\left[s^{X(t)}\right] = 1 - \left(\frac{e^{-\varphi(t)}}{1-s} + \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\varphi(\tau)}\, d\tau\right)^{-1}. \tag{4.1}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(X(t) > 0\right) = \left(e^{-\varphi(t)} + \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\varphi(\tau)}\, d\tau\right)^{-1}. \tag{4.2}$$

Et c'est là que l'on voit apparaître la différence avec un processus de naissance et de mort en environnement constant, pour lequel $\varphi(t) = (\lambda - \mu)t$ et donc qui a comme limite de Yaglom la loi géométrique de paramètre $1 - \lambda/\mu$.

Sans nuire à la généralité, et pour simplifier les calculs, nous allons supposer que la période est $T = 1$. On se place dans le cas sous critique $R_0 < 1$ i.e. $\varphi(1) = \langle\lambda\rangle - \langle\mu\rangle < 0$. Nous avons une limite de Yaglom périodique :

Proposition 4.1 Il existe une fonction 1-périodique $h(s)$ telle que l'on aie la convergence en loi, pour tout $s \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(X(s+n) \mid X(s+n) > 0) = \mathcal{G}(h(s)) \tag{4.3}$$

avec $\mathcal{G}(p)$ la loi géométrique de paramètre p.

En effet, on peut écrire que $\mathbb{E}\left[1 - s^{X(t)}\right] = \frac{1}{g(s,t)}$ avec

$$g(s,t) = \frac{e^{-\varphi(t)}}{1-s} + \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\varphi(\tau)}\, d\tau = g(0,t) + e^{-\varphi(t)}\left(\frac{1}{1-s} - 1\right)$$
$$g(0,t) = e^{-\varphi(t)} + \int_0^t \lambda(\tau)e^{-\varphi(\tau)}\, d\tau = 1 + \int_0^t \mu(u)e^{-\varphi(u)}\, du$$

et on peut montrer que pour une fonction périodique $h(s)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\varphi(n+s)} \int_0^{n+s} \mu(u)\, e^{-\varphi(u)}\, ds = h(s) \tag{4.4}$$

En conséquence, comme $\varphi(t)/t \to \varphi(1) < 0$ on a $\varphi(t) \to -\infty$ et

$$\mathbb{E}\left[1 - s^{X(t)} \mid X(t) > 0\right] = \frac{g(0,t)}{g(s,t)} \to \frac{h(s)}{h(s) + \frac{1}{1-s} - 1} \tag{4.5}$$

Il nous reste à démontrer (4.4). C'est une application immédiate de la Proposition A.2. On obtient que la fonction périodique h vaut

$$h(s) = e^{\varphi(s)}\left(\frac{1}{e^{-\varphi(1)} - 1}\int_0^1 \mu(u)e^{-\varphi(u)}\, du + \int_0^s \mu(u)e^{-\varphi(u)}\, du\right). \tag{4.6}$$

Si les fonctions λ et μ sont continues, on peut dériver l'expression précédente et obtenir que h est l'unique solution de période 1 de l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = \mu(t) + (\lambda(t) - \mu(t))x(t)\,.$$

Essayons d'utiliser la propriété de Markov pour voir si on ne peut pas obtenir la convergence, au niveau des lois fini dimensionnelles, de la loi du processus $(X(n+s))_{0\le s\le 1}$ vers un processus $(Z(s))_{0\le s\le 1}$ dont les lois marginales sont géométriques.

On note $\alpha(s) = \mathcal{G}(h(s))$ la loi géométrique de paramètre $h(s)$, et on note Q_t le semi groupe du processus tué lorsqu'il atteint 0:

$$Q_t f(x) = \mathbb{E}_x \left[f(X(t)) \, \mathbf{1}_{(\tau > t)} \right]$$

avec $\tau = \inf \{ t > 0 : X(t) = 0 \}$. Nous pouvons ainsi réécrire la convergence en loi (4.3) : pour toute fonction continue bornée f:

$$\mathbb{E} \left[f(X(n+t)) \mid \tau > n+t \right] \to \alpha_t(f) \, .$$

Proposition 4.3 La famille $(T_{s,t})_{s \leq t}$ définie par

$$T_{s,t} f(x) = \frac{Q_{t-s} f(x)}{\alpha_s(Q_{t-s} 1)}$$

est une famille de probabilités de transition :

$$T_{t,u} \circ T_{s,t} = T_{s,u} \, .$$

Si $(Z(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Markov inhomogène de famille de probabilités de transition $T_{s,t}$ tel que $Z(0)$ suit la loi $\alpha(0)$, alors $Z(t)$ suit la loi $\alpha(t)$ et on a la convergence au niveau des lois finidimensionnelles, de la loi du processus $(X(n+t), 0 \leq t \leq 1)$ conditionné par $\tau > n+1$, vers le processus $(Z(t), 0 \leq t \leq 1)$.

Démonstration | Commençons par un calcul simple. Soit f, g deux fonctions continues bornées, et $s \leq t$. Alors, par la propriété de Markov

$$\mathbb{E}_x \left[g(X(n+s)) f(X(n+t)) \, \mathbf{1}_{(\tau > t)} \right] = \mathbb{E}_x \left[Q_{t-s} f(X(n+s)) g(X(n+s)) \, \mathbf{1}_{(\tau > n+s)} \right]$$

Si on applique cette identité à $f = g = 1$, on obtient

$$\frac{\mathbb{P}_x(\tau > n+t)}{\mathbb{P}_x(\tau > n+s)} = \mathbb{E}_x [Q_{t-s} 1(X(n+s)) \mid \tau > n+s] \to \alpha_s(Q_{t-s} 1) \, .$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [g(X(n+s)) f(X(n+t)) \mid \tau > t] &= \frac{\mathbb{P}_x(\tau > n+s)}{\mathbb{P}_x(\tau > n+t)} \mathbb{E}_x [Q_{t-s} f(X(n+s)) g(X(n+s)) \mid \tau > n+s] \\ &\to \frac{\alpha_s(g Q_{t-s} f)}{\alpha_s(Q_{t-s} 1)} \, . \end{aligned}$$

En prenant $g = 1$, on obtient, toujours par la convergence en loi (4.3) appliquée a $\mathbb{E}_x [g(X(n+s)) f(X(n+t)) \mid \tau > t]$,

$$\alpha_t(f) = \frac{\alpha_s(Q_{t-s} f)}{\alpha_s(Q_{t-s} 1)}$$

Cette identité permet bien , en l'appliquant à $f = 1$, de vérifier que $T_{s,t}$ définit des probabilités de transition car

$$\begin{aligned} T_{t,u} \circ T_{s,t} f(x) &= \frac{1}{\alpha_s(Q_{t-s}1)\alpha_t(Q_{u-t}1)} Q_{u-t} \circ Q_{t-s} f(x) \\ &= \frac{1}{\alpha_s(Q_{t-s}1)\alpha_t(Q_{u-t}1)} Q_{u-s} f(x) \\ &= \frac{1}{\alpha_s(Q_{u-s}1)} Q_{u-s} f(x) . \end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\mathbb{E}_x[g(X(n+s))f(X(n+t)) \mid \tau > t] \to \alpha_s(gT_{s,t}f) = \mathbb{E}\left[g(Z_s)T_{s,t}f(Z_s)\right] = \mathbb{E}\left[g(Z_s)f(Z_t)\right] .$$

On généralise sans difficulté ce résultat à la convergence des lois fini dimensionnelles. ∎

5 Cas surcritique : valeurs reproductives et loi de composition stable

On peut considérer qu'en fait le processus de naissance et de mort en environnement périodique est un processus de branchement multitype, avec une infinité continue de types. Le type d'un individu est sa phase $s \in [0, T]$, i.e. la date relative de naissance dans la période : deux individus nés à n périodes de distance, n entier, ont donc même type.

Il est naturel de se demander alors, si dans le cas surcritique, il y a existence d'analogues à la loi de composition stable et aux valeurs reproductives (voir Jagers and Nerman [12, 13]). Plus précisément existe-t-il une probabilité π–que l'on appellerait loi de composition stable– sur $[0, T]$ telle que si $X^A(t)$ dénote le nombre d'individus vivant à l'instant t, et dont la date relative de naissance est dans $A \subset [0, T]$, alors sur l'ensemble de survie $\{\forall t > 0, X(t) > 0\}$ on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{X^A(t)}{X(t)} = \pi(A) .$$

On peut également chercher s'il existe une fonction $v(s)$ définie sur $[0, T]$, étendue périodiquement, telle que si un individu 1 est né à l'instant relatif a, si un individu 2 est né à l'instant relatif b, si $(X^1(t), t \geq a)$ et $(X^2(t), t \geq b)$ désignent leurs descendances respectives, alors

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathbb{E}\left[X^1(a+t)\right]}{\mathbb{E}\left[X^2(b+t)\right]} = \frac{v(a)}{v(b)} .$$

Nous allons voir qu'en fait les valeurs reproductives, la fonction périodique v, existe en fait (Ceci a été prouvé par Klein and Macdonald [17]). En revanche, il n'existe pas de loi de composition stable, mais il existe une famille périodique de probabilités $(\pi_t)_{t \geq 0}$ qui est un attracteur pour les proportions au sens où, sur l'ensemble de survie, on a la limite en probabilité

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{X^A(t)}{X(t)} - \pi_t(A) = 0 .$$

> **Supposition 5.1** On suppose donc que l'on est dans le cas surcritique et on pose $\alpha = \langle \lambda \rangle - \langle \mu \rangle = \frac{1}{T}\varphi(T)$. On suppose également que $A(T) = \int_0^T \lambda(u)\, du > 0$, c'est à dire que le taux de naissance n'est pas identiquement nul.

On note $\mathcal{P}_T$ l'ensemble des fonctions boréliennes T-périodiques bornées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$. On considère la famille T-périodique de probabilités π_t sur $[0, T]$ muni de sa tribu des boréliens, caractérisée par

$$\int f \, d\pi_t = \frac{1}{e^{A(T)} - 1} \int_t^{t+T} f(u)\lambda(u)e^{A(u)}\, du \,, \quad (f \in \mathcal{P}_T) . \tag{5.1}$$

Nous considérons le processus $(Z(t), t \geq 0)$ à valeurs dans les mesures ponctuelles finies, les sommes finies de masses de Dirac sur $[0, T[$: il y a une masse en $s \in [0, T[$ pour chaque individu né en $t' < t$, qui est encore vivant à l'instant t, et tel que $t' = s \mod t$.

Théorème 5.2 On suppose que l'on part d'un individu à l'instant 0, i.e. $Z(0) = \delta_0$ ou encore $X(0) = 1$. Alors, sur l'ensemble de survie, on a la convergence en probabilité pour toute $f \in \mathcal{P}_T$:

$$\frac{\int f\, dZ(t)}{X(t)} - \int f d\pi_t \xrightarrow[t \to +\infty]{P} 0\,. \tag{5.2}$$

Nous allons commencer par établir un résultat en moyenne. On considère les deux fonctions périodiques

$$u(t) = e^{\varphi(t) - \alpha t}, \qquad v(\tau) = e^{\alpha\tau - \varphi(\tau)}\,. \tag{5.3}$$

Proposition 5.3 La famille de mesures $(\nu_t)_{t \geq \tau}$ définie par

$$\int f\, d\nu_t = e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbb{E}\left[\int f\, dZ(t) \mid Z(\tau) = \delta_\tau\right] \quad (f \in \mathcal{P}_T)\,, \tag{5.4}$$

admet comme attracteur périodique la famille $\mu_t = v(\tau) u(t) \pi_t$.

On en déduit immédiatement en prenant $f = 1$ que la fonction v représente bien les valeurs reproductives. En effet, conditionner par $Z(\tau) = \delta_\tau$ revient à conditionner par $X(\tau) = 1$.

Corollaire 5.4 Pour tous instants τ, η,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathbb{E}\left[X(t+\tau) \mid X(\tau) = 1\right]}{\mathbb{E}\left[X(t+\eta) \mid X(\eta) = 1\right]} = \frac{v(\tau)}{v(\eta)}\,. \tag{5.5}$$

Preuve de la Proposition 5.3 | On peut sans nuire à la généralité supposer que $\tau = 0$. En effet il suffit de remplacer les fonctions λ et μ par $\lambda(t+\tau)$ et $\mu(t+\tau)$.

Le générateur du processus à valeurs mesures $(Z(t))_{t \geq 0}$ est donné par

$$L_t^Z F(\nu) = \int \nu(ds) [\mu(t)(F(\nu - \delta_s) - F(\nu)) + \lambda(t) F(\nu + \delta_{t \mod T}) - F(\nu)] \tag{5.6}$$

avec F une fonction mesurable bornée définie sur les mesures finies sur $[0, T]$. Étant donnée $f \in \mathcal{P}_T$, on considère la fonction

$$w(t) = \mathbb{E}\left[\int f\, dZ(t) \mid Z(0) = \delta_0\right]. \tag{5.7}$$

Nous allons appliquer L'équation de Kolmogorov forward à la fonction $F(\nu) = \int f\, d\nu$. On a

$$L_t^Z F(\nu) = \int \nu(ds)(-f(s)\mu(t) + \lambda(t) f(t)). \tag{5.8}$$

En conséquence w satisfait l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \mathbb{E}\left[L_t^Z F(Z_t) \mid Z(0) = \delta_0\right] \\
&= -\mu(t) w(t) + \lambda(t) f(t) \mathbb{E}\left[X(t) \mid X(0) = 1\right] \\
&= -\mu(t) w(t) + \lambda(t) f(t) e^{\varphi(t)}\,.
\end{aligned}$$

La solution est, avec $B(t) = \int_0^t \mu(s)\,ds$, rappelons que $\varphi(t) = A(t) - B(t)$,

$$w(t) = e^{-B(t)} \left(w(0) + \int_0^t e^{B(s)} f(s)\lambda(s) e^{\varphi(s)}\,ds \right) = e^{-B(t)} \left(w(0) + \int_0^t f(s)\lambda(s) e^{A(s)}\,ds \right). \tag{5.9}$$

En conséquence, grâce à la Proposition A.2, on a

$$\begin{aligned}
\int f\,d\nu_t &= e^{-\alpha t} w(t) \\
&= e^{-\alpha t + \varphi(t)}\, e^{-A(t)} \left(w(0) + \int_0^t f(s)\lambda(s) e^{A(s)}\,ds \right) \\
&= u(t) \int f\,d\pi_t + o(1)\,.
\end{aligned}$$

■

Pour prouver le théorème 5.2, nous avons besoin d'une généralisation de la Proposition 5.3 à une convergence dans L^1.

Proposition 5.5 On suppose que $Z(0) = \delta_0$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{P}_T$ on a la convergence dans L^1:

$$e^{-\alpha t} \int f\,dZ(t) - W\,u(t) \int f\,d\pi_t \xrightarrow[t \to +\infty]{L^1} 0\,. \tag{5.10}$$

Démonstration | Nous allons utiliser le résultat très général [13, Theorem 5.3,Corollary 5.4]. Il suffit d'établir la majoration suivante du second moment

$$\sup_{s \in [0,T]} \operatorname{Var}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha u} \xi_s(du) \right] < +\infty\,, \tag{5.11}$$

avec ξ_s le processus de reproduction d'un individu né à l'instant s: c'est le processus ponctuel sur $\mathbb{R}^+$ suivant. Soit N^λ (resp. N^μ) un processus de Poisson inhomogène de taux $t \to \lambda(s+t)$ (resp. $t \to \mu(s+t)$). Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ les temps de saut de N^λ et soit T_μ le premier temps d saut de N^μ, supposé indépendant du processus N^λ. Alors,

$$\xi_s = \sum_{i \geq 1, T_i < T_\mu} \delta_{T_i}\,. \tag{5.12}$$

Comme le processus de reproduction a pour temps de vie $\zeta = T_\mu$ on a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u} \xi_s(du) = \sum_{i : T_i < T_\mu} e^{-\alpha T_i} =: U \tag{5.13}$$

En conséquence, comme N^λ est un processus de Poisson,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(U) &= \operatorname{Var}(\mathbb{E}\left[U \mid T_\mu\right]) + \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}(U \mid T_\mu)\right] \\
&= \operatorname{Var}\left(\int_0^{T_\mu} \lambda(s+u) e^{-\alpha u} du \right) + \mathbb{E}\left[\int_0^{T_\mu} \lambda(s+u) e^{-2\alpha u}\,du \right] \leq C < +\infty
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^{T_\mu} \lambda(s+u) e^{-2\alpha u}\,du \right] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(T_\mu \in dt\right) \int_0^t \lambda(s+u) e^{-2\alpha u}\,du \\
&\leq \int_s^\infty \lambda(\tau) e^{-2\alpha(\tau - s)} d\tau \leq \frac{\|\lambda\|_\infty}{2\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 5.2 | On rappelle que l'ensemble de survie est $\mathcal{S} = \{W > 0\}$. En conséquence la convergence L^1 entraîne la convergence en proba sur $\mathcal{S}$. On applique cela à la fonction f et à la fonction constante égale à 1. On obtient la convergence en proba sur $\mathcal{S}$

$$e^{-\alpha t} \int f \, dZ(t) - W \, u(t) \int f \, d\pi_t \to 0 \tag{5.14}$$

$$e^{-\alpha t} X(t) - W u(t) \to 0. \tag{5.15}$$

On conclut en faisant le quotient de ces deux convergences.

5.1 Une illustration numérique

Nous allons considérer un taux de mort constant et un taux de naissance sinusoïdal:

$$\lambda(t) = \lambda_0 (1 + c \cos(2\pi t / T)) \, . \tag{5.16}$$

Nous nous restreignons à observer la composition de la population aux instants multiples de la période T. Le théorème 5.2 donne la convergence en probabilité, si $Z(0) = \delta_0$ i.e. on part d'un individu à l'instant 0,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\int f \, dZ(NT)}{X(NT)} - \int f \, d\pi_0 \xrightarrow[t \to +\infty]{P} 0 \, . \tag{5.17}$$

avec

$$\pi_0(dt) = \frac{1}{e^{A(T)} - 1} \lambda(t) e^{A(t)} \, \mathbf{1}_{(t \in (0,T))} \, dt \, , \tag{5.18}$$

et

$$A(t) = \lambda_0 (t + \frac{cT}{2\pi} \sin(2\pi t / T)) \tag{5.19}$$

Nous avons donc simulé le processus de naissance et de mort sur N périodes. Nous attendons la première fois où la population est non éteinte à l'instant NT, puis nous construisons l'histogramme des phases (instants relatifs de naissance) des individus encore vivants à l'instant NT. On compare dans la figure 1 cet histogramme avec la densité théorique de π_0 et on fait figurer la courbe du taux de naissance λ pour bien comprendre l'effet de ses fluctuations sur la répartition des phases. On compare également la valeur reproductive et le taux de naissance pour observer un décalage, phénomène déjà illustré dans le papier [7].

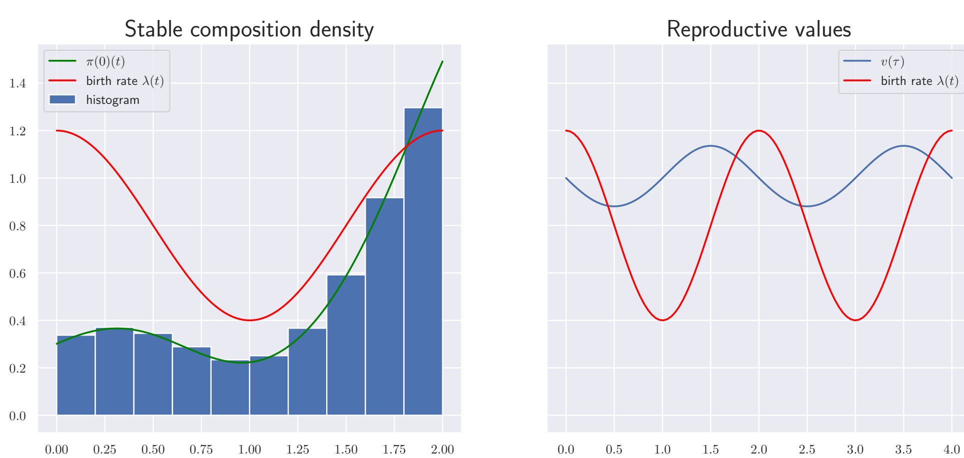

FIGURE 1 : Taux de naissance sinusoïdal $\lambda_0 = 0.8, \mu_0 = 0.1, T = 2, N = 8, c = 0.5$ Le nombre d'individus vivant à l'instant NT est de 43565. L'histogramme représente les dates relatives de naissance de ces individus. Nous observons que la valeur reproductive est maximale non pas quand le taux de naissance est maximal, mais au milieu de la période favorable $\{t : \lambda(t) > \mu\}$.

Le notebook python de la simulation est disponible sur github `https://github.com/philcarmona/conda` sous le nom `StableCompositionPeriodic.ipynb`.Il suffit de télécharger ce fichier ainsi que les fichiers python `stablecompoper.py,bdp.py` pour pouvoir faire tourner le notebook localement. On peut également faire tourner ce notebook interactivement sur binder en suivant le lien suivant (et en étant patient) `https://notebooks.gesis.org/binder/v2/gh/philcarmona/conda/master` puis en cliquant sur le Notebook StableCompositionPeriodic.ipynb.

6 Petites et grandes périodes dans le cas surcritique: moyennisation et "Winter is coming"

On suppose, comme dans Carmona and Gandon [7] que les taux de naissance et de mort sont données par

$$\lambda_T(t) = \lambda(t/T), \quad \mu_T(t) = \mu(t/T), \tag{6.1}$$

avec λ, μ des fonctions 1-périodiques, de sorte que

$$\varphi_T(t) = T\varphi(t/T) = T\int_0^{t/T} (\lambda(s) - \mu(s))\, ds\,. \tag{6.2}$$

La probabilité d'émergence pour un pathogène introduit à l'instant $t_0 T$, avec $0 \leq t_0 \leq 1$, vaut, avec $\langle\lambda\rangle = \int_0^1 \lambda(s)\, ds$,

$$\begin{align} p_e(t_0 T) &= 1 - \frac{\int_0^1 \mu(s+t_0)\, e^{-T(\varphi(s+t_0)-\varphi(t_0))}\, ds}{\int_0^1 \lambda(s+t_0)\, e^{-T(\varphi(s+t_0)-\varphi(t_0))}\, ds} \tag{6.3}\\ &= \frac{1-e^{-T\langle\lambda-\mu\rangle}}{T\int_0^1 \lambda(s+t_0)\, e^{-T(\varphi(s+t_0)-\varphi(t_0))}\, ds} \tag{6.4}\end{align}$$

On voit facilement sur cette dernière formule un phénomène de **moyennisation en petites périodes** (Rappelons que $R_0 = \frac{\langle\lambda\rangle}{\langle\mu\rangle}$) : on peut remplacer les taux de naissance et de mort par leurs moyennes temporelles

$$\lim_{T\to 0+} p_e(t_0 T) = 1 - \frac{1}{R_0} = \frac{\langle\lambda\rangle - \langle\mu\rangle}{\langle\lambda\rangle}\,. \tag{6.5}$$

Pour traiter le cas des grandes périodes, nous faisons des hypothèses de régularité supplémentaires qui peuvent sans doute être allégées. On suppose que les fonctions λ et μ sont C^1 par morceaux, et que pour tout point de discontinuité τ, l'ensemble $\{t \in [0,1] : \varphi(t) = \varphi(\tau)\}$ est fini. ALors on définit l'ensemble **Winter is Coming** par

$$\mathrm{WIC} = \{t : \exists s > t, \varphi(s) < \varphi(t)\}\,. \tag{6.6}$$

L'ensemble WIC est donc composé des points qui observent dans le futur un *piège démographique* : si $t \in \mathrm{WIC}$ alors il existe $s > t$ tel que

$$\mathbb{E}\left[X(s) \mid X(t_0) = x_0\right] = x_0 e^{\varphi(s)-\varphi(t_0)} < x_0\,. \tag{6.7}$$

On montre dans ce cas (voir le Sup Info de Carmona and Gandon [7]) que

$$\lim_{T\to+\infty} p_e(t_0 T) = \left(1 - \frac{\mu(t_0)}{\lambda(t_0)}\right) \mathbf{1}_{(t_0 \notin \mathrm{WIC})}\,. \tag{6.8}$$

7 Le cas multitype

On considère un processus de Markov inhomogène $(X(t), t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^d$ de générateur

$$L_t f(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i \left[\mu_i(t)(f(x - e_i) - f(x)) + \sum_{j=1}^{d} \lambda_{ij}(t)(f(x + e_j) - f(x)) \right], \tag{7.1}$$

pour x in $\mathbb{N}^d$ et $f : \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ bornée. La bas canonique de $\mathbb{R}^d$ est $(e_1, \ldots, e_d)$. En conséquence la fonction T-périodique $\mu_i(t)$ désigne le taux de mort d'un individu de type i et la fonction T-périodique $\lambda_{ij}(t)$ désigne le taux de naissance d'un individu de type j par un individu de type i.

Pour étudier l'extinction du processus, nous ne disposons plus de calculs explicites comme en dimension $d = 1$. Nous allons utiliser les résultats connus dans le cas du processus de Galton Watson multitype.

La remarque principale est que bien que le processus $(X(t), t \geq 0)$ soit inhomogène, la périodicité des intensités de saut entraîne que le processus $(Y_n = X(nT), n \geq 0)$ est un processus de Markov homogène qui conserve la propriété de branchement : c'est donc un processus de Galton Watson multitype.

7.1 Criticalité et Nombre de reproduction

On suppose que les taux λ_{ij} et μ_i sont des fonctions continues par morceaux. Si $x^0 \in \mathbb{N}^d$ on note $x_k(t) = \mathbb{E}\left[X_k(t) \mid X(0) = x^0\right]$. Alors d'après l'équation de Kolmogorov forward, le vecteur $x(t) = (x_k(t), 1 \leq k \leq d) = \mathbb{E}\left[X(t) \mid X(0) = x^0\right]$ est solution de l'EDO

$$\frac{dx}{dt} = A^*(t)x(t), \quad x(0) = x^0, \tag{7.2}$$

où $A(t)$ est la matrice des taux

$$A_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t) - \mathbf{1}_{(i=j)}\mu_i(t).$$

Observons que $A(t)$ est coopérative, i.e. $A_{ij}(t) = \lambda_{ij}(t) \geq 0$ si $i \neq j$.

Supposition 7.1 On suppose que la matrice $A(0)$ est irréductible. C'est à dire que la matrice $\Lambda(0)$ définie par $\Lambda(0)_{ij} = \lambda_{ij}(0)$ est *primitive* : il existe un entier N tel que $\Lambda(0)^N > 0$ (tous les coefficients sont positifs).

Alors, par exemple d'après le Lemme 2.1 de Aronsson and Kellogg [1], on a pour tout $t > 0$, $\phi(t) > 0$, avec $\phi(t) = \phi_{A^*}(t)$ la matrice solution fondamentale associée à 7.2, i.e. la solution matricielle de l'EDO

$$\frac{d\phi}{dt} = A(t)\phi(t), \quad \phi(0) = Id. \tag{7.3}$$

Il s'ensuit que $\phi(t)$ est la matrice des moyennes du processus de Galton Watson $Y_n = X(nT)$: si $y \in \mathbb{N}^d$, alors

$$\mathbb{E}\left[Y_1 \mid Y_0 = y\right] = \phi(T)y. \tag{7.4}$$

Observons que comme le processus $X(t)$ est absorbé en 0, on a

$$\{\forall n, Y_n \neq 0\} = \{\forall t, X(t) \neq 0\} \tag{7.5}$$

L'irréductibilité de $\phi(T)$ entraîne que Y est indécomposable (Voir Haccou et al. [9, Sections 2.3 et5.5]). En conséquence, si

$$\lambda_d = \rho(\phi(T))$$

est le rayon spectral de la matrice des moyennes, on a

— Si $\lambda_d \leq 1$, alors $Y_n \to 0$ ps et donc $X(t) \to 0$ p.s.
— Si $\lambda_d > 1$ et si $X(0) = x^0 \neq 0$, alors il y a une possibilité de survie $\mathbb{P}(\forall t, X(t) \neq 0) > 0$.

On peut également encore définir R_0 comme le rayon spectral de la next generation matrix (voir Bacaër [2], Bacaër and Guernaoui [5]). Alors, voir par exemple Heesterbeek and Roberts [10, 11], on a l'équivalence

$$\lambda_d > 1 \iff R_0 > 1 .$$

7.2 Cas sous critique : existence d'une limite de Yaglom périodique

On va démontrer cette limite en utilisant encore le processus de Galton Watson multitype $Y_n = X(nT)$. En effet, comme $\lambda_d < 1$, d'après Joffe and Spitzer [15, Theorem2 et Theorem3], il existe une probabilité ν sur $\mathbb{N}^d \setminus \{0\}$ et $\gamma > 0$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x(X(nT) = y \mid X(nT) \neq 0) = \nu(y) \qquad (x, y \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}). \tag{7.6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_d^{-n} \mathbb{P}_x(X(nT) \neq 0) = \gamma x.u \qquad (x \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}). \tag{7.7}$$

On en déduit alors, par convergence dominée, immédiatement, pour $x \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$ et $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\lambda_d^{-n} \mathbb{P}_x(X(t+nT) \neq 0) &= \lambda_d^{-n} \mathbb{P}_x\Big(\mathbb{P}_{X(nT)}(X_t \neq 0)\, \mathbf{1}_{(X(nT)\neq 0)}\Big) \\
&= \lambda_d^{-n} \sum_{k\neq 0} \mathbb{P}_x(X(nT) = k)\mathbb{P}_k(X_t \neq 0) \\
&= \lambda_d^{-n} \mathbb{P}\left(X(nT) \neq 0\right) \sum_{k\neq 0} \mathbb{P}_x(X(nT) = k \mid X(nT) \neq 0)\mathbb{P}_k(X_t \neq 0) \\
&\to \gamma x.u \sum_{k\neq 0} \nu(k)\mathbb{P}_k(X_t \neq 0) = \gamma x.u \mathbb{P}_\nu(X_t \neq 0) .
\end{aligned}$$

De même, si en outre $y \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_d^{-n} \mathbb{P}_x(X(t+nT) = y) = \gamma\, x.u\, \mathbb{P}_\nu(X_t = y) . \tag{7.8}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x(X(t+nT) = y \mid X(t+nT) \neq 0) = \mathbb{P}_\nu(X_t = y \mid X_t \neq 0) =: \nu_t(y) . \tag{7.9}$$

Nous avons donc démontré la

Proposition 7.2 (Limite périodique de Yaglom) Il existe une famille T-périodique de probabilités $(\nu_t, t \geq 0)$ sur $\mathbb{N}^d \setminus \{0\}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x(X(t+nT) = y \mid X(t+nT) \neq 0) = \nu_t(y) . \tag{7.10}$$

7.3 Cas surcritique : valeurs reproductives et loi de composition stable

Nous aurons besoin de quelques résultats de la théorie de Floquet (voir par exemple Teschl [19, Section 3.6]). La matrice de monodromie $\phi(T)$ est inversible, car $\phi(T) > 0$: elle peut donc s'écrire $\phi(T) = e^{TB}$ avec une matrice B dont les coefficients peuvent être des nombres complexes. De la relation $\phi(t+T) = \phi(t)\phi(T)$ découle l'existence d'une fonction matricielle T-périodique $(P(t)$ telle que

$$\phi(t) = P(t)e^{tB} , \quad P(0) = Id . \tag{7.11}$$

En appliquant le théorème de Perron Frobenius à la matrice de monodromie $e^{TB} > 0$, on obtient l'existence d'un vecteur colonne $u > 0$ et d'un vecteur ligne $v > 0$ tels que $\sum_i u_i = u_i.\mathbb{1} = 1$, $\sum_i v_i u_i = u.v = vu = 1$et

$$Bu = \alpha u, \quad vB = \alpha b , \quad e^{\alpha T} = \lambda_d = \rho(e^{TB}) . \tag{7.12}$$

En outre, on a la limite matricielle

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t}e^{tB} = uv\,, \tag{7.13}$$

avec uv la matrice de projection $(uv)_{ij} = u_i v_j$. On considère les vecteurs T-périodiques

$$v(\tau) = vP(\tau)^{-1}\,, \quad u(t) = P(t)u\,. \tag{7.14}$$

On montre facilement (voir Klein and Macdonald [17]) l'existence de l'attracteur périodique :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha(t-\tau)}\mathbb{E}\left[X(t) \mid X(\tau) = e_j\right] - v_j(\tau)u(t) = 0\,. \tag{7.15}$$

Il est plus difficile, voir encore Klein and Macdonald [17], d'établir la convergence en probabilité, sur l'ensemble de survie $\mathcal{S}$ des proportions : si $|x| = |x_1| + \cdots + |x_d| = \|x\|_1$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, alors sur $\mathcal{S}$

$$\frac{X_i(t)}{|X(t)|} - u_i(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{P} 0\,. \tag{7.16}$$

Notation 7.3 On identifie une mesure finie ν sur $\{1,\ldots,d\} \times [0,T[$ à la famille de ses restrictions $\nu_i(A) = \nu(\{i\} \times A)$ pour $A \in \mathcal{B}([0,T[)$.

Théorème 7.4 Soit $i \in \{1,\ldots,d\}$. Presque sûrement, sur l'ensemble de survie $\mathcal{S} = \{\omega | X(t)|(\omega) > 0\}$, on a la convergence en probabilité, pour toute $f_i \in \mathcal{P}_T$,

$$\frac{\int f_i\, dZ_i(t)}{X_i(t)} - \int f_i\, d\pi_{i,t} \xrightarrow[t\to+\infty]{P} 0\,, \tag{7.17}$$

avec $\pi_{i,t}$ la probabilité définie sur $[0,T[$ par

$$\int f_i\, d\pi_{i,t} = e^{-B_{i,\alpha}(t)}u_i(t)(e^{B_{i,\alpha}(T)} - 1)\int_t^{t+T} f_i(s)d(u(s)e^{B_{i,\alpha}(s)}) \tag{7.18}$$

où

$$B_{i,\alpha}(t) = B_i(t) + \alpha t = \alpha t + \int_0^t \mu_i(s)\, ds\,. \tag{7.19}$$

On établit d'abord le résultat en moyenne suivant.

Proposition 7.5 Soit $i \in \{1,\ldots,d\}$, $\tau \geq 0$ et $x \in nds$. La famille de mesures finies $(\nu_{i,t}, t \geq 0)$ définie par

$$\int f_i d\nu_{i,t} = e^{-\alpha(t-\tau)}\mathbb{E}\left[\int f_i dZ_i(t) \mid Z(\tau) = \delta_x\right] \qquad (f \in \mathcal{P}_T) \tag{7.20}$$

admet comme attracteur T-périodique la famille $\mu_{i,t} = v(\tau).x\, u_i(t)\pi_{i,t}$.

Démonstration | On peut sans nuire à la généralité supposer $\tau = 0$.
Le générateur du processus à valeurs mesures $(Z(t), t \geq 0)$ est donné par

$$L_t^Z F(\nu) = \sum_k \int \nu_k(ds)\left[\mu_k(t)\Big(F(\nu - \delta_{(i,s)}) - F(\nu)\Big) + \sum_j \lambda_{kj}(t)\Big(F(\nu + \delta_{(j,t \mod T)}) - F(\nu)\Big)\right]. \tag{7.21}$$

Pour la fonction $F(\nu) = \int f_i \, d\nu_i$, avec $f_i \in \mathcal{P}_T$ fixée, on obtient

$$L_t^Z F(\nu) = -\mu_i(t) \int f_i \, d\nu_i + \sum_k \lambda_{ki}(t) f_i(t) \int d\nu_k \,. \tag{7.22}$$

En conséquence,l'équation forward de Kolmogorov entraîne que la fonction

$$w_i(t) = \mathbb{E}\left[\int f_i \, dZ_i(t) \mid Z(0) = \delta_x\right] \tag{7.23}$$

satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dw_i}{dt} = -\mu_i(t) w_i(t) + f_i(t) \sum_k \lambda_{ki}(t) x_k(t) \tag{7.24}$$

avec

$$x_k(t) = \mathbb{E}\left[\int dZ_k(t) \mid Z(0) = \delta_x\right] = \mathbb{E}\left[X_k(t) \mid X(0) = x\right] = (\phi(t)x)_k \,. \tag{7.25}$$

La solution de cette équation différentielle est

$$w_i(t) = e^{-B_i(t)} \left(w_i(0) + \int_0^t e^{B_i(s)} f_i(s) \sum_k \lambda_{ki}(s) x_k(s) \, ds \right). \tag{7.26}$$

Soit $y(t) = e^{-\alpha t} x(t)$. Alors

$$\sum_k \lambda_{ki}(t) x_k(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} + \mu_i(t) x_i(t) = e^{\alpha t} \left(\frac{dy_i(t)}{dt} + (\alpha + \mu_i(t)) y_i(t) \right). \tag{7.27}$$

En conséquence, si $z(t) = \left(\frac{dy_i(t)}{dt} + (\alpha + \mu_i(t)) y_i(t)\right)$, alors

$$e^{-\alpha t} w_i(t) = e^{B_{i,\alpha}(t)} \left(w_i(0) + \int_0^t f(s) z(s) e^{B_{i,\alpha}(s)} \, ds \right). \tag{7.28}$$

Observons que la fonction $z(t)$ n'est pas nécessairement T-périodique. En revanche elle a un attracteur T-périodique. En effet, comme $e^{-\alpha t} e^{tB} \to uv$,

$$y(t) = e^{-\alpha t} \phi(t) x = P(t)(e^{-\alpha t} e^{tB}) x = vx \, P(t) u + o(1) = vx \, u(t) + o(1) \,. \tag{7.29}$$

Donc $\frac{dy}{dt} = -\alpha y(t) + A^*(t) y(t)$ a pour attracteur périodique $vx(-\alpha u(t) + A^*(t) u(t))$ et donc $z(t)$ a pour attracteur périodique

$$z_p(t) = vx \, (\frac{du_i(t)}{dt} + (\alpha + \mu_i(t)) u_i(t)). \tag{7.30}$$

Enfin, on applique le Corollaire A.3 à la fonction z, son attracteur périodique z_p et à $A(t) = B_{i,\alpha}(t)$ pour obtenir que $e^{-\alpha t} w_i(t)$ a pour attracteur périodique

$$\frac{e^{-B_{i,\alpha}(t)}}{e^{B_{i,\alpha}(T)} - 1} \int_t^{t+T} z_p(s) e^{B_{i,\alpha}(s)} \, ds = v(\tau).x \, u_i(t) \int f_i \, d\pi_{i,t} \,. \tag{7.31}$$

■

Pour généraliser cette convergence en moyenne à une convergence L^1, et en déduire le théorème 7.4, nous allons considérer la martingale positive

$$W(t) = e^{-\alpha t} v(t) X(t) \,. \tag{7.32}$$

En effet, comme $vB = \alpha v$,

$$e^{-\alpha t} v(t) = e^{-\alpha t} v P(t)^{-1} = v e^{-tB} P(t)^{-1} = v\phi(t)^{-1}\,. \tag{7.33}$$

En conséquence, si $s \le t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W(t) \mid \mathcal{F}_s\right] &= e^{-\alpha t} v(t) \mathbb{E}\left[X(t) \mid X(s)\right] \\ &= e^{-\alpha t} v(t)\phi(t)\phi(s)^{-1} X(s) = e^{-\alpha t} v\phi(s)^{-1} X(s) = W(s)\,.\end{aligned}$$

La martingale positive $(W(t), t \ge 0)$ converge presque sûrement vers une variable intégrable positive $W(\infty)$. On montrer comme en dimension 1 que la martingale est bornée dans L^2 donc Uniformément intégrable et que l'on peut identifier l'ensemble de survie $\mathcal{S} = \{W(\infty) > 0\}$ p.s.

On peut également établir, similairement à la Proposition 5.5 la

Proposition 7.6 On suppose que $Z_i(0) = \delta_0$. Alors pour toute fonction $f_i \in \mathcal{P}_T$ on a la convergence dans L^1:

$$e^{-\alpha t} \int f_i \, dZ_i(t) - W(\infty)\, u_i(t) \int f_i \, d\pi_{i,t} \xrightarrow[t\to+\infty]{L^1} 0\,. \tag{7.34}$$

Enfin, on prouve le Théorème 7.4 en appliquant le résultat précédent à $f_i \in \mathcal{P}_T$ et à $f_i = 1$ et en faisant le quotient des convergences sur l'ensemble $\mathcal{S} = \{W(\infty) > 0\}$.

A Attracteurs périodiques en loi

Définition A.1 Soit E un espace topologique muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{E}$. On considère deux familles $(\nu_t, t \ge 0)$ et $(\mu_t, t \ge 0)$ de mesures positives finies définies sur $(E, \mathcal{E})$. On dit que $(\nu_t, t \ge 0)$ a pour attracteur T-périodique $(\mu_t, t \ge 0)$ si μ est périodique, i.e. pour tout t, $\mu_{t+T} = \mu_t$, et si pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\lim_{t\to+\infty} \int f d\nu_t - \int f d\mu_t = 0\,. \tag{A.1}$$

En particulier, si pour tout t, μ_t et ν_t sont des probabilités, alors pour tout t_0, on a la convergence en loi

$$\nu_{t_0+nT} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mu_{t_0}\,. \tag{A.2}$$

Proposition A.2 Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée T-périodique telle que $A(T) > 0$ avec $A(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$. Soit $\mathcal{P}_T$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boréliennes, T-périodiques, bornées. Alors la famille de probabilités $(\nu_t, t \ge 0)$ sur $[0, T]$ muni de sa tribu des boréliens, définie par

$$\int f d\nu_t = e^{-A(t)} \int_0^t f(u) e^{A(u)}\, du\,, \quad (f \in \mathcal{P}_T) \tag{A.3}$$

a pour attracteur T-périodique la famille $(\mu_t, t \ge 0)$ définie par

$$\int f d\mu_t = \frac{e^{-A(t)}}{e^{A(T)} - 1} \int_t^{t+T} f(u) e^{A(u)}\, du\,, \quad (f \in \mathcal{P}_T)\,. \tag{A.4}$$

Plus précisément on a la majoration suivante de la distance en variation totale:

$$\|\nu_t - \mu_t\|_{TV} = \sup_{A\in\mathcal{B}([0,T])} |\nu_t(A) - \mu_t(A)| \le e^{-A(t)} \frac{T e^{T\|\lambda\|_\infty}}{e^{A(T)-1}}\,.$$

Démonstration | Par T-périodicité de λ on a $A(t+T) = A(t) + A(T)$. Pour $f \in \mathcal{P}_T$ on pose

$$\Lambda(t) = \int_0^t f(u) e^{A(u)}\, du\,. \tag{A.5}$$

Alors, par périodicité de λ et de f on a :

$$\Lambda(t+kT) - \Lambda(kT) = e^{kA(T)}\Lambda(t)\,, \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

On en déduit la périodicité $\mu_{t+T} = \mu_t$ car

$$\begin{aligned}\int f\, d\mu_t &= \frac{e^{-A(t)}}{e^{A(T)}-1}(\Lambda(t+T) - \Lambda(t))\\ \int f d\mu_{t+T} &= \frac{e^{-A(t)-A(T)}}{e^{A(T)}-1}(\Lambda(t+T+T) - \Lambda(t+T)) = \int f\, d\mu_t\,.\end{aligned}$$

Et on a la formule,

$$\begin{aligned}\int f\, d\mu_t &= \frac{e^{-A(t)}}{e^{A(T)}-1}(\Lambda(T) - \Lambda(t) + \Lambda(t+T) - \Lambda(T))\\ &= \frac{e^{-A(t)}}{e^{A(T)}-1}(\Lambda(T) - \Lambda(t) + e^{A(T)}\Lambda(t))\\ &= e^{-A(t)}\left(\frac{1}{e^{A(T)}-1}\Lambda(T) + \Lambda(t)\right).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $t = nT + u$, avec $u \in [0, T[$, alors

$$\begin{aligned}\int f d\nu_t = e^{-A(t)}\Lambda(t) &= e^{-A(t)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\Lambda((k+1)T) - \Lambda(kT)) + \Lambda(nT+u) - \Lambda(nT)\right)\\ &= e^{-A(u)-nA(T)}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{kA(T)}\Lambda(T) + e^{nA(T)}\Lambda(u)\right)\\ &= e^{-A(u)}\left(\frac{1-e^{-nA(t)}}{e^{A(T)-1}}\Lambda(T) + \Lambda(u)\right)\\ &= e^{-A(u)}\left(\frac{1}{e^{A(T)-1}}\Lambda(T) + \Lambda(u)\right) - \frac{e^{-A(t)}}{e^{A(T)}-1}\Lambda(T)\\ &= \int f d\mu_u + o(1) = \int f\, d\mu_t + o(1)\,,\end{aligned}$$

car $A(t) = nA(T) + A(u) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Comme si $\|f\|_\infty \le 1$ on a

$$|\Lambda(T)| \le \int_0^T e^{A(u)}\, du \le Te^{T\|\lambda\|_\infty}$$

On en déduit que

$$\|\nu_t - \mu_t\|_{VT} \le e^{-A(t)}\frac{Te^{T\|\lambda\|_\infty}}{e^{A(T)-1}}\,.$$

■

Nous aurons besoin du corollaire suivant:

Corollaire A.3 Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée positive T-périodique telle que $A(T) > 0$ avec $A(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$. Alors, si la fonction mesurable bornée f a pour attracteur la fonction T-périodique g, i.e. $\lim_{t\to+\infty} f(t) - g(t) = 0$, alors on a

$$\lim_{t\to+\infty} \int f\,d\nu_t - \int g\,d\mu_t = 0\,. \tag{A.6}$$

Démonstration | On doit seulement prouver que $\int f\,d\nu_t - \int g\,d\nu_t \to 0$. Étant donné $\epsilon > 0$, il existe t_0 tel que pour $t \geq t_0$ on a $|f(t) - g(t)| \leq \epsilon$. Alors, comme $e^{-A(t)} \to 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\nu_t - \int g\,d\nu_t\right| &\leq e^{-A(t)} \int_0^{t_0} |f(u) - g(u)| e^{A(u)}\,du + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} |f(u) - g(u)| e^{A(u)}\,du \\ &\leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) e^{-A(t)} t_0 e^{A(t_0)} + \epsilon e^{-A(t)} (t - t_0) e^{A(t)} \\ &\leq o(1) + \epsilon \leq 2\epsilon\,,\end{aligned}$$

dès que $t \geq t_1 \geq t_0$. ■

Références

[1] G. Aronsson and R. B. Kellogg. On a differential equation arising from compartmental analysis. *Math. Biosci.*, 38(1-2):113–122, 1978. ISSN 0025-5564. doi:10.1016/0025-5564(78)90021-4. URL `https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90021-4`.

[2] Nicolas Bacaër. Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population. *Bull. Math. Biol.*, 69(3):1067–1091, 2007. ISSN 0092-8240. doi:10.1007/s11538-006-9166-9. URL `https://doi.org/10.1007/s11538-006-9166-9`.

[3] Nicolas Bacaër and El Hadi Ait Dads. On the probability of extinction in a periodic environment. *J. Math. Biol.*, 68(3):533–548, 2014. ISSN 0303-6812. doi:10.1007/s00285-012-0623-9. URL `https://doi.org/10.1007/s00285-012-0623-9`.

[4] Nicolas Bacaër and El Hadi Ait Dads. On the probability of extinction in a periodic environment. In *J. Math. Biol.* Bacaër and Ait Dads [3], pages 533–548. ISSN 0303-6812. doi:10.1007/s00285-012-0623-9. URL `https://doi.org/10.1007/s00285-012-0623-9`.

[5] Nicolas Bacaër and Souad Guernaoui. The epidemic threshold of vector-borne diseases with seasonality. The case of cutaneous leishmaniasis in Chichaoua, Morocco. *J. Math. Biol.*, 53(3):421–436, 2006. ISSN 0303-6812. doi:10.1007/s00285-006-0015-0. URL `https://doi.org/10.1007/s00285-006-0015-0`.

[6] Norman T. J. Bailey. *The elements of stochastic processes with applications to the natural sciences*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

[7] Philippe Carmona and Sylvain Gandon. Winter is coming: pathogen emergence in seasonal environments. *PLoS Comput. Bio.*, 16(7), 2020. URL `https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007954`.

[8] Odo Diekmann, Hans Heesterbeek, and Tom Britton. *Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics*. Princeton Series in Theoretical and Computational Biology. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013. ISBN 978-0-691-15539-5.

[9] Patsy Haccou, Peter Jagers, and Vladimir A. Vatutin. *Branching processes: variation, growth, and extinction of populations*, volume 5 of *Cambridge Studies in Adaptive Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge; IIASA, Laxenburg, 2007. ISBN 978-0-521-83220-5; 0-521-83220-9.

[10] J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts. Threshold quantities for helminth infections. *J. Math. Biol.*, 33(4): 415–434, 1995. ISSN 0303-6812. doi:10.1007/BF00176380. URL `https://doi.org/10.1007/BF00176380`.

[11] J. A. P. Heesterbeek and M. G. Roberts. Threshold quantities for helminth infections. *Journal of Biological Systems*, 3(3):779–787, 1995. doi:10.1142/S021833909500071X. URL `https://doi.org/10.1142/S021833909500071X`.

[12] Peter Jagers and Olle Nerman. The growth and composition of branching populations. *Adv. in Appl. Probab.*, 16(2):221–259, 1984. ISSN 0001-8678. doi:10.2307/1427068. URL `https://doi.org/10.2307/1427068`.

[13] Peter Jagers and Olle Nerman. Branching processes in periodically varying environment. *Ann. Probab.*, 13 (1):254–268, 1985. ISSN 0091-1798. URL http://links.jstor.org/sici?sici=0091-1798(198502)13:1<254:BPIPVE>2.0.CO;2-5&origin=MSN.

[14] Peter Jagers and Olle Nerman. The asymptotic composition of supercritical multi-type branching populations. In *Séminaire de Probabilités, XXX*, volume 1626 of *Lecture Notes in Math.*, pages 40–54. Springer, Berlin, 1996. doi:10.1007/BFb0094640. URL `https://doi.org/10.1007/BFb0094640`.

[15] A. Joffe and F. Spitzer. On multitype branching processes with $\rho \leq 1$. *J. Math. Anal. Appl.*, 19:409–430, 1967. ISSN 0022-247X. doi:10.1016/0022-247X(67)90001-7. URL `https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90001-7`.

[16] David G. Kendall. On the generalized "birth-and-death" process. *Ann. Math. Statistics*, 19:1–15, 1948. ISSN 0003-4851. doi:10.1214/aoms/1177730285. URL `https://doi.org/10.1214/aoms/1177730285`.

[17] B. Klein and P. D. M. Macdonald. The multitype continuous-time Markov branching process in a periodic environment. *Adv. in Appl. Probab.*, 12(1):81–93, 1980. ISSN 0001-8678. doi:10.2307/1426495. URL `https://doi.org/10.2307/1426495`.

[18] Sylvie Méléard and Denis Villemonais. Quasi-stationary distributions and population processes. *Probab. Surv.*, 9:340–410, 2012. doi:10.1214/11-PS191. URL `https://doi.org/10.1214/11-PS191`.

[19] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. ISBN 978-0-8218-8328-0. doi:10.1090/gsm/140. URL `https://doi.org/10.1090/gsm/140`.